TITLE:

Anti-Loewner 行列について (バナッハ空間論の研究とその周辺)

AUTHOR(S):

日高, 知佳良; 佐野, 隆志

CITATION:

日高, 知佳良 ...[et al]. Anti-Loewner 行列について (バナッハ空間論の研究とその周辺). 数理解析研究所講究録 2011, 1753: 1-3

ISSUE DATE:

2011-08

URL:

http://hdl.handle.net/2433/171188

RIGHT:

京都大学学術情報リポジトリ KURENAI 紅
Kyoto University Research Information Repository

数理解析研究所講究録
第 1753 巻 2011 年 1-3

Anti-Loewner 行列について

山形大学大学院理工学研究科　日高　知佳良 (Chikara HIDAKA)
Graduate School of Science and Engineering,
Yamagata University

山形大学理学部数理科学科　佐野　隆志 (Takashi SANO)
Department of Mathematical Sciences, Faculty of Science,
Yamagata University

この小論では [2] の概略を述べる. 詳細については [2], [1] を参照せよ.

まず定義などを簡単に説明する. n 次正方行列 $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ に対し, $A \geqq B$ を $\langle x, Ax\rangle \geqq \langle x, Bx\rangle$ $(\forall x \in \mathbb{C}^n)$ と定義する. $A \geqq 0$ のとき A は *positive semidefinite* であるという.

$H^n := \{x = (x_i) \in \mathbb{C}^n : \sum_{i=1}^n x_i = 0\}$ とおく. エルミート行列 $A \in M_n(\mathbb{C})$ が $\langle x, Ax\rangle \geqq 0\,(\forall x \in H^n)$ をみたすとき *conditionally positive definite* であるという (略して c.p.d.). また $-A$ が c.p.d. であるとき conditionally negative definite であるという (略して c.n.d.).

$f : (0,\infty) \longrightarrow (0,\infty)$ が *matrix monotone of order n (n-monotone)* とは, 可逆な positive semidefinite $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ に対し $A \geqq B \Longrightarrow f(A) \geqq f(B)$ が成立することをいう.

任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して *n-monotone* であるとき *operator monotone* であるという.

相異なる $t_1, \ldots, t_n > 0$ に対し

$$L_{f(t)}(t_1, \ldots, t_n) := \left[\frac{f(t_i) - f(t_j)}{t_i - t_j}\right]_{i,j=1}^n$$

を (f に関する) *Loewner* 行列 といい, 次が成り立つ.

$$\begin{aligned} f : \text{operator monotone} &\Longleftrightarrow L_{f(t)}(t_1, \ldots, t_n) \geqq 0 \quad (\forall n \in \mathbb{N}, \forall t_i > 0 : \text{distinct}) \\ &\Longleftrightarrow f(t) = \alpha + \beta t + \int_0^\infty \frac{t}{\lambda + t} d\nu(\lambda) \\ &\qquad (\alpha, \beta \geqq 0, \nu : \text{positive measure on } (0,\infty)) \end{aligned}$$

$t_1, \ldots, t_n > 0$ に対し

$$K_{f(t)}(t_1,\dots,t_n) := \left[\frac{f(t_i)+f(t_j)}{t_i+t_j}\right]_{i,j=1}^{n}$$

を (f に関する) *anti-Loewner* 行列 という.

最近, Audenaert が次のような特徴付けを得た.

Theorem (Audenaert[1])
$f : (0,\infty) \longrightarrow (0,\infty)$, C^1 とすると, 次は同値である.

(a) $K_{f(t)}(t_1,\dots,t_n) \geqq 0 \quad (\forall n \in \mathbb{N}, \forall t_i > 0 : \text{distinct})$.

(b) $t \longmapsto f(\sqrt{t})\sqrt{t}$ on $(0,\infty)$ は operator monotone.

(c) $t \longmapsto -\frac{f(\sqrt{t})}{\sqrt{t}}$ on $(0,\infty)$ は operator monotone.

(d) $f(t) = \frac{\alpha}{t} + \beta t + \int_0^\infty \frac{t}{\lambda+t^2}\, d\nu(\lambda) \quad (\alpha, \beta \geqq 0 , \nu : \text{positive measure on } (0,\infty))$.

Proposition
$f : (0,\infty) \longrightarrow (0,\infty)$, differentiable , $f(0) = f'(0) = 0$ とする.

$t_1,\dots,t_n > 0$ が任意に与えられたとき

$K_{f(t)}(t_1,\dots t_n, t_{n+1}) \quad \text{c.n.d.} \quad (\forall t_{n+1} > 0)$

$\Longrightarrow K_{\frac{f(t)}{t^2}}(t_1,\dots,t_n) \geqq 0$

$\Longrightarrow K_{f(t)}(t_1,\dots,t_n) \quad \text{c.n.d.}$

が成り立つ.

この Proposition と Audenaert の特徴付けより次の Theorem を得る.

Theorem
$f : (0,\infty) \longrightarrow (0,\infty)$, C^1 , $f(0) = f'(0) = 0$ とする.
次は同値である.

(a) $K_{f(t)}(t_1,\dots,t_n) \quad \text{c.n.d.} \quad (\forall n \in \mathbb{N} , \forall t_i > 0 : \text{distinct})$

(b) $K_{\frac{f(t)}{t^2}}(t_1,\dots,t_n) \geqq 0 \quad (\forall n \in \mathbb{N} , \forall t_i > 0 : \text{distinct})$

このとき

$$f(t) = \beta t^3 + \int_0^\infty \frac{t^3}{\lambda+t^2}\, d\nu(\lambda)$$

$\beta \geqq 0$, ν : positive measure on $(0,\infty)$, である.

このとき, f は単調増加関数であるので逆関数を考えることができる.

ここで infinitely divisible の定義を述べる. $X = [x_{ij}] \in M_n(\mathbb{C})$, $x_{ij} \geqq 0$, が $[x_{ij}^k] \geqq 0\,(\forall k > 0)$ をみたすとき X は *infinitely divisible* であるという.

Bapat の定理より次の事がわかる.

Corollary
$K_{f^{-1}}$ は infinitely divisible である.

参考文献

[1] K. M. R. Audenaert, *A characterisation of anti-Löwner functions,* preprint.

[2] C. Hidaka and T.Sano, *Conditional negativity of anti-Loewner matrices,* preprint.